

Πρόβλημα

Έστω V δ.γ με εσωτερικό γινόμενο $n \in \mathbb{N}$ και έστω $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο. Τότε το U είναι βάση του V .

Απόδειξη

Αφού το U είναι γρ. ανεξ. σύνολο που αποτελείται από n διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ και η διάσταση του $V \Rightarrow U$ βάση του V άρα και ορθοκανονική βάση του V

Εφαρμογή sos*

Έστω V δ.γ με εσωτερικό γινόμενο. Δίνονται 2 διανύσματα u_0, v_0 του V τα οποία είναι γρ. ανεξ. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) 2 διανύσματα ~~του~~ v_1, v_2 του V τέτοια ώστε να ισχύουν τα εξής

1. $u_0 = v_1 + v_2$

2. $v_1 \perp v_2$

3. v_2 και v_1 είναι συγγραμμικά.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν τα v_1, v_2 που ικανοποιούν αυτές τις 3 ιδιότητες. Από 3) υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R} : v_2 = \lambda v_1$ (4)

Αν 1) έχω $v_1 = u_0 - v_2$ (5) και από 4,5 $\Rightarrow v_1 = u_0 - Av_0$ (6)

Αν 2) έχω $v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \xleftrightarrow{(6)} \langle u_0 - Av_0, Av_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \langle u_0, Av_0 \rangle - \langle Av_0, Av_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow A \langle u_0, v_0 \rangle - A^2 \|v_0\|^2 = 0$$

Για $A=0 \Rightarrow v_1 = u_0, v_2 = 0$ (κατανοούνται και δεδομένα)
τετραπλήειν άσχετα

$$\xleftrightarrow{A=0} v_1 = u_0 \quad v_2 = 0$$

$$\xleftrightarrow{A \neq 0} A = \frac{\langle u_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2}$$

Οπότε $v_2 = \frac{\langle u_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0$ και $v_1 = u_0 - \frac{\langle u_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0$

Το 3) είναι αβέβο όπως και το 1)

$$\left\langle \frac{\langle u_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0, u_0 - \frac{\langle u_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\langle u_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0, u_0 \right\rangle - \left\langle \frac{\langle u_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0, \frac{\langle u_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} v_0 \right\rangle =$$

$$= \frac{\langle u_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \langle v_0, u_0 \rangle - \left(\frac{\langle u_0, v_0 \rangle}{\|v_0\|^2} \right)^2 \langle v_0, v_0 \rangle =$$

$$= \frac{\langle u_0, v_0 \rangle^2}{\|v_0\|^2} - \frac{\langle v_0, u_0 \rangle^2}{\|v_0\|^4} \|v_0\|^2 = 0$$

$$\langle u_0, v_0 \rangle = \langle (1, 2, 3), (1, 1, 0) \rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 1 + 2 = 3$$

$$\|v_0\|^2 = \|(1, 1, 0)\|^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2$$

$$v_2 = \frac{3}{2} v_0 = \frac{3}{2} (1, 1, 0) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right)$$

$$v_1 = u_0 - v_2 = (1, 2, 3) - \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3 \right)$$

$$\| \rho_{Z_W}(u_0) \|^2 = \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2 + 0^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2} \Rightarrow \| \rho_{Z_W}(u_0) \| = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$v_2 = \rho_{Z_W}(u_0)$$

$$\|v_1\|^2 = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + 3^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 9 = \frac{19}{2} \Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{\frac{19}{2}}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω V δ.γ. με εσωτερικό γινόμενο. Δύο σύνολα $u_1, u_2 \subseteq V$ ονομάζονται κάθετα μεταξύ τους αν κάθε διάνυσμα του u_1 είναι κάθετο με κάθε διάνυσμα του u_2 . Τότε τα συμβολίζουμε $u_1 \perp u_2$.
Λητάδα: $\forall u \in u_1, \forall v \in u_2 \quad u \perp v$

$$\text{π.χ. } \underbrace{\{0, 1, 0\}}_{u_1}, \underbrace{\{1, 0, 0\}}_{u_2}$$

Γενικά έστω V δ.γ. με εσωτερικό γινόμενο ~~με~~ με διάσταση n .
Έστω $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ να είναι ορθοκανονική βάση του

Αν $U_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_{i_0}\}$ και $U_2 = \{u_{i_0+1}, u_{i_0+2}, \dots, u_n\}$

τότε $U_1 \perp U_2$ για κάποιο $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

1) Έστω V δ.γ. με εσωτερικό γινόμενο και $U_1, U_2 \subseteq V$. $U_1 \perp U_2$.

Τότε $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ή $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

Απόδειξη

Έστω U_1, U_2 με $U_1, U_2 \neq \emptyset$

Άρα $\exists u \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow u \in U_1 \wedge u \in U_2$. Άρα $u \perp u$ αφού $U_1 \perp U_2$

Άρα $u=0 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \subseteq \{0\} \Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$

2) Έστω V δ.γ. με εσωτ. γινόμενο και $U_1, U_2 \subseteq V$ με $U_1 \perp U_2$.

Τότε ισχύει και ότι $(U_1)^\perp \supseteq (U_2)$

Απόδειξη

Έστω $u \in (U_1)^\perp$. Άρα εφ' όρισμού του $(U_1)^\perp$ υπάρχουν $u_1, u_2, \dots, u_n \in U_1$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

Για τον ίδιο λόγο αν πάρουμε $w \in U_2$ υπάρχουν $w_1, w_2, \dots, w_m \in U_2$ και $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}$

$$w = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \dots + \mu_m w_m$$

Όμως $u_i \perp w_j$ $\forall i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$

$$\text{Ληθαδν} \quad \langle u_i, w_j \rangle = 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, n \quad j=1, 2, \dots, m$$

$$\text{Θνδo} \quad \langle u, w \rangle = 0$$

$$\langle u, w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n d_i u_i, \sum_{j=1}^m d_j w_j \right\rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n d_i d_j \langle u_i, w_j \rangle = 0$$

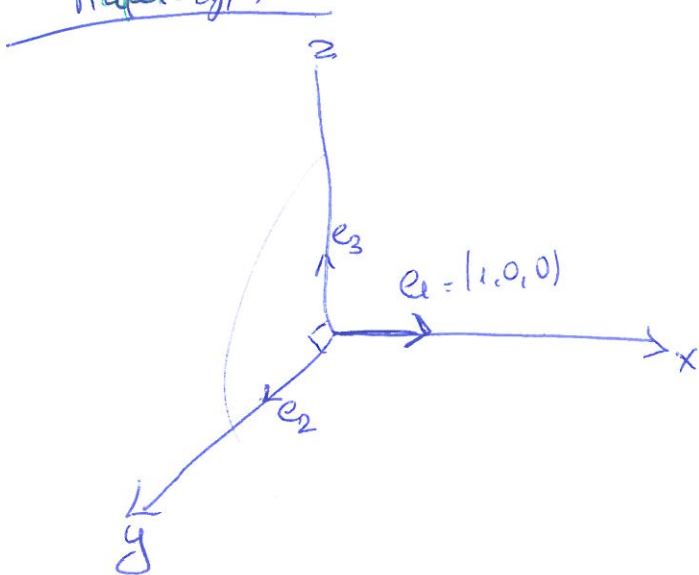
$$\text{Συνων} \quad \langle u, w \rangle = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}, \forall w \in \mathcal{W}_2 \quad \text{Αρα} \quad (\mathcal{U}_1) \perp (\mathcal{W}_2)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω V δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο. και $\mathcal{U} \subseteq V$. Ονομάζουμε ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\mathcal{U}$ το σύνολο των διανυσμάτων του V που είναι κάθετα με κάθε διάνυσμα του $\mathcal{U}$.

$$\text{Συμβολικά γράφουμε} \quad \mathcal{U}^\perp = \{u \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}\}$$

Παράδειγμα



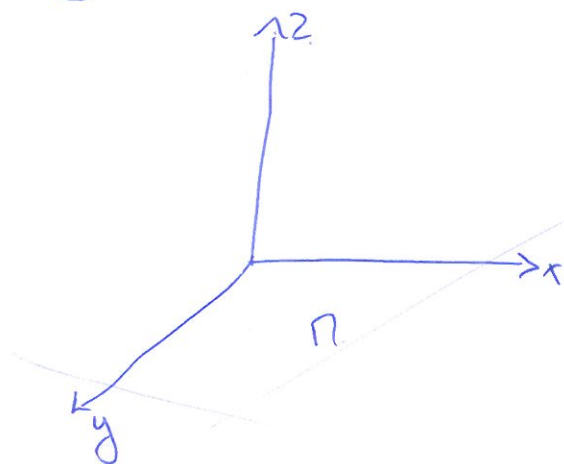
$$\mathcal{U} = \{x=0\}$$

$$\mathcal{U}^\perp = \{(\lambda e_1, e_2, e_3)\}$$

$$\mathcal{U} = \{y=0\}$$

$$\mathcal{U} = \{x \neq y\}$$

$$\mathcal{U}^\perp = \{e_3\}$$



ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω V δ.γ. με εσωτ. γινόμενο. Έστω $U \subseteq V$. Τότε το $U^\perp$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V

Απόδειξη

Αρχικά $U^\perp \neq \emptyset$ αφού $\{0\} \in U^\perp$

Έστω $u_0, v_0 \in U^\perp$. Τότε $\langle u_0, w \rangle = 0 \quad \forall w \in U$
 $\langle v_0, w \rangle = 0 \quad \forall w \in U \quad \Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle u_0 + v_0, w \rangle = \langle u_0, w \rangle + \langle v_0, w \rangle = 0 \quad \forall w \in U \Rightarrow u_0 + v_0 \in U^\perp$$

~~Παράδειγμα~~ Αν $u_1 \in U^\perp$ τότε $\langle u_1, w \rangle = 0 \quad \forall w \in U$

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε $\langle \lambda u_1, w \rangle = \lambda \langle u_1, w \rangle = 0 \quad \forall w \in U \Rightarrow \lambda u_1 \in U^\perp$

Άρα $\forall u, v \in U^\perp$ το $u+v \in U^\perp \Bigg\} \Rightarrow$ Άρα από προηγούμενα είδαμε
 $\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ το $\lambda u \in U^\perp$ το $U^\perp$ είναι διανυσματικός
υπόχωρος του V

Έστω V δ.γ. και $A, B \subseteq V$

$$\text{Τότε } A+B = \{a+b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Αν A και B είναι διανυσματικοί υπόχωροι του V τότε και το

$A+B$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V και $A \cap B = \{0\}$ τότε

το άθροισμα λέγεται εσωτ.

1) Το άθροισμα $A+B$ δύο διανυσματικών υποχώρων του V είναι ευθύ $\alpha\alpha\alpha$ $\forall u \in A+B$ υπάρχουν μοναδικά ορίσματα $a \in A$ και $b \in B$ τ.ω. $u = a+b$. Αν το άθροισμα $A+B$ είναι ευθύ γραμμικό $A+B = A \oplus B$.

2) Έστω V δ.γ με εσωτερικό ~~πο~~ γινόμενο πεπερασμένου διαστάσεως. Έστω $W \leq V$ υποχώροι του V . Τότε ισχύουν τα εξής:

α. $W \oplus W^\perp = V$

β. $(W^\perp)^\perp = W$

Απόδειξη

α. Έστω $u \in W \cap W^\perp$. Τότε αφού $u \in W$ και $u \in W^\perp$ έχουμε $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$. Άρα το άθροισμα $W + W^\perp$ είναι ευθύ

Έστω $u_0 \in V$. Θα δείξουμε ότι $u_0 \in W \oplus W^\perp$. Ο W έχει μια ορθοκανονική βάση. Έστω $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ να είναι μια ορθ. βάση του W . Ορίσω τα διανύσματα $w_0 = \sum_{i=1}^n \langle u_i, u_0 \rangle u_i$
 $w' = u_0 - w_0$

Άρα $w_0 \in W$. Έχουμε ότι $u_0 = w_0 + w'$. Άρα $w' \in W^\perp$
 $\uparrow$
 από
 ορίδιο

$$\begin{aligned} \langle w', u_1 \rangle &= \langle u_0 - w_0, u_1 \rangle = \langle u_0, u_1 \rangle - \sum_{i=1}^n \langle u_i, u_0 \rangle \langle u_i, u_1 \rangle = \\ &= \langle u_0, u_1 \rangle - \sum_{i=1}^n \langle u_i, u_0 \rangle \langle u_i, u_1 \rangle = \\ &= \langle u_0, u_1 \rangle - \langle \langle u_1, u_0 \rangle u_1 + \langle u_2, u_0 \rangle u_2 + \dots + \langle u_n, u_0 \rangle u_n, u_1 \rangle = \\ &= \langle u_0, u_1 \rangle - \langle \langle u_1, u_0 \rangle u_1, u_1 \rangle + \langle \langle u_2, u_0 \rangle u_2, u_1 \rangle + \dots + \langle \langle u_n, u_0 \rangle u_n, u_1 \rangle = \end{aligned}$$

$$= \langle u_0, u_1 \rangle - \langle u_1, u_0 \rangle \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_2, u_0 \rangle \langle u_2, u_1 \rangle + \dots + \langle u_n, u_0 \rangle \langle u_n, u_1 \rangle =$$

" $\|u_1\|=1$ αφού $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ορθ. βέση

$$= \langle u_0, u_1 \rangle - \langle u_1, u_0 \rangle = 0$$

Αρα όμοια $\langle w', u_i \rangle = 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, n$

Συνεπώς από πρόταση που δείξαμε $(w')^\perp \supset \{u_1, \dots, u_n\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow w' \perp u, \quad \forall u \in W \Rightarrow w' \in W^\perp$$

$$\text{Αρα έγω } u_0 = w_0 + w' \quad \left. \begin{array}{l} w_0 \in W \\ w' \in W^\perp \end{array} \right\} \Rightarrow u_0 \in W \oplus W^\perp$$

$$\text{Αρα } V \subseteq W \oplus W^\perp \Rightarrow V = W \oplus W^\perp$$

6. έγω 3 σύνολα : $W, W^\perp, (W^\perp)^\perp$

Από τους ορισμούς και μόνο έγω ότι $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ (1)

$$\text{Έστω τώρα } u_0 \in (W^\perp)^\perp \subseteq V \Rightarrow u_0 \in V$$

Από το α) υπάρχουν μοναδικά ορισμένα $w_0 \in W$ και $w' \in W^\perp$

$$\text{π.ω } u_0 = w_0 + w'$$

Τώρα $u_0 \in (W^\perp)^\perp$ και $w' \in W^\perp$. Αρα από τους ορισμούς έγω ότι

$$\langle u_0, w' \rangle = 0 \Rightarrow \langle w_0 + w', w' \rangle = 0 \Rightarrow \langle w_0, w' \rangle + \langle w', w' \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\text{όπως και } w_0 \in W \text{ και } w' \in W^\perp \Rightarrow \langle w_0, w' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle w', w' \rangle = 0 \Rightarrow w' = 0$$

$$\text{Αρα } u_0 = w_0 + 0 \Rightarrow u_0 = w_0 \in W \Rightarrow u_0 \in W$$

Apa $(W^\perp)^\perp \subseteq W$ (2)

Ano (2), (2) exu $(W^\perp)^\perp = W$

$$(W^\perp)^\perp = W^{\perp\perp}$$

